DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1979

Composition de Mathématiques

2e EPREUVE

Mercredi 9 Mai 1979, de 8 heures à midi

PREMIÈRE PARTIE

1° Calculer les inverses des matrices réelles

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2° On note ${}^tM$ la transposée d'une matrice M. Montrer qu'il existe une matrice unique J telle que ${}^tJ = J$ et que, pour tous les nombres réels x, y, z,

$$x^2 + y^2 - z^2 = \begin{vmatrix} x & y & z \end{vmatrix} J \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

3° Montrer que l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre trois M telles que

$${}^tMJM = J$$

est un groupe multiplicatif, que l'on notera G.

4° Montrer que A, B et C appartiennent à G.

DEUXIÈME PARTIE

1° Montrer que si x, y, z sont trois entiers rationnels, les nombres

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2(x+z)(y+z)$$

et $x^2 + y^2 - z^2 + 2(x-z)(y-z)$

sont des carrés d'entiers naturels.

2° Montrer que les relations

$$z_1 - x_1 = y + z, \qquad z_1 - y_1 = x + z, \qquad x_1 + y_1 - z_1 = x + y + z$$

sont équivalentes à une relation matricielle

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

où H est une matrice constante que l'on déterminera.

.../...

3° On appelle triplet rectangulaire tout triplet (x, y, z) d'entiers naturels sans diviseur commun autre que 1 et tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Soit (x, y, z) un triplet rectangulaire tel que $z > 1$. Posant

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

montrer que l'un des triplets (x', y', z'), (— x', y', z') ou (x', —y', z') est rectangulaire et que l'on a

$$1 \leqslant z' \leqslant z - 1.$$

4° Imaginer un algorithme transformant, en un nombre fini d'étapes, par des produits matriciels comme ci-dessus, un triplet rectangulaire quelconque, en (0, 1, 1).

5° Donner dix triplets rectangulaires distincts.

TROISIÈME PARTIE

1° Soit E l'ensemble des suites réelles (a_n) telles que, pour tout n :

$$a_{n+3} - 7a_{n+2} + 7a_{n+1} - a_n = 0.$$

Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 3 dont on déterminera une base formée d'applications de la forme

$$n \longmapsto r^n.$$

2° Déterminer (a_n) sachant que $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$. Calculer alors a_3 et a_4.

3° Déterminer (a_n) sachant que $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

4° Déterminer (a_n) sachant que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.

QUATRIÈME PARTIE

On considère toujours la matrice A définie dans la première partie.

1° Montrer que A^3 est combinaison linéaire de I, A et A^2.

2° Montrer qu'il existe trois suites (u_n), (v_n), (w_n) telles que, pour tout n :

$$A^n = u_n I + v_n A + w_n A^2,$$

et que ces suites appartiennent à l'espace E défini au 1° de la troisième partie.

3° En déduire une méthode de calcul de A^n.

4° Déterminer une injection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^3$ telle que, pour tout n, f(n) soit un triplet rectangulaire.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail